臺北縣立高中職 99 學年度教師聯合甄選

數學科試題

考生作答說明：
一、 請先檢視答案卡個人資料與准考證是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。
二、 本試題計 10 題選擇題，答案為單選，依題意於 A、B、C、D 四個選項中擇一作答。
填充題 5 題，計算題 2 題。
三、 題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
四、 請使用黑色 2B 鉛筆於答案卡上畫記作答，禁止使用立可白塗改，以免無法判讀。
五、 答案卡、答案本（卷）與試卷須一起繳交，始可離開試場。

一、 選擇題：20%，每題 2 分

（C）1.已知 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)=\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)=\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)=1$，則 x，y，z 的大小關係為何？

(A) $x<y<z$　　(B) $z<y<x$

(C) $z<x<y$　　(D) $y<z<x$

（B）2.有三個函數甲、乙、丙，函數甲為 $y=f(x)$，函數乙為函數甲的反函數，函數丙的圖形與函數乙的圖形關於直線 $x+y=0$ 對稱，則函數丙為何？

(A) $y=f(x)$　　(B) $y=-f(-x)$

(C) $y=-f^{-1}(x)$　　(D) $y=-f^{-1}(-x)$

（A）3.已知直線 L_1：$y=\dfrac{4}{3}x+4$ 分別交 x 軸、y 軸於 A、B 兩點。若 L_2 為 $\angle BAO$ 的角平分線，則 L_2 的直線方程式為下列何者？

(A) $x-2y+3=0$　　(B) $x-3y+3=0$

(C) $2x-y+3=0$　　(D) $3x-y+3=0$

（D）4.設 $f(x)=x^2-1-x\cos x+\sin x$，則下列何者恆正確？

(A) $x>0$ 時 $f'(x)<0$

(B) $x<0$ 時 $f'(x)>0$

(C) $f'(x)=0$ 至少有兩個相異實根

(D) $f(x)=0$ 至多有兩個相異實根

（A）5.某班有甲、乙、丙……等 12 人，分成 A、B 兩組，每組 6 人；A 組負責打掃教室，B 組負責打掃廁所，則甲、乙二人在同一組的機率為何？

(A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{5}{22}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{4}{18}$

（D）6.設 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 且 P 為 3 階可逆方陣。若 $B=(P^{-1}AP)^2$，則 B 的行列式值為何？

(A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 4

（B）7.兩位自行車騎士在一條公路上相向騎車。最初兩車相距 100 公里，而兩位自行車騎士騎車的速度都是每小時 50 公里。假設有隻蒼蠅，飛行速率是每小時 60 公里。兩位自行車騎士同時相向而行時，蒼蠅從一輛自行車往前飛，在到達另一輛自行車之後，立刻折返飛行。請問兩輛自行車相遇時，這隻蒼蠅來來回回，共飛行了多少公里？

(A) 30 公里 (B) 60 公里 (C) 90 公里 (D) 120 公里

（D）8.甲、乙、丙三人以固定速率朝終點跑步，乙比甲慢一分鐘出發，乙出發後 5 分鐘追上甲；丙又比乙慢一分鐘出發，丙出發後 8 分鐘追上乙。若丙從出發到達終點共花了 80 分鐘，則丙到達終點時，甲還需要幾分鐘才能到達終點？

(A) 23 分鐘 (B) 24 分鐘 (C) 25 分鐘 (D) 26 分鐘

（C）9.設 $a=0.9,\ b=1.1,\ c=1.01$ 且 $x_n=\frac{\alpha a^n}{1+a^n}+\frac{\beta b^n}{1+b^n}+\frac{\gamma c^n}{1+c^n}, n=1, 2, \cdots$,其中 α,β,γ 為給定實數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 之值為何？

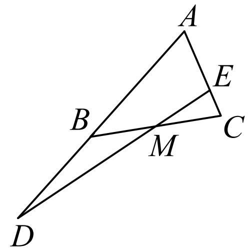
(A) $\alpha+\beta+\gamma$ (B) $\alpha+\beta$ (C) $\beta+\gamma$ (D) $\alpha+\gamma$

（B）10.已知一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 沒有實數解。甲看錯了二次項係數，誤求得兩根為 2 和 4；然而乙看錯了一次項或常數項其中一項係數的符號，而誤求得兩根為－1 和 4，那麼，$\frac{2b+3c}{a}=$？

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

二、簡答題(填充)：30%，每題 6 分

1. 如圖(一)，$\triangle ABC$ 中，M 為 $\overline{BC}$ 中點，過 M 的直線分別交直線 AB、直線 AC 於 D、E，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AE}$，則 $m+n$ 之值為___2___。



2. 設 $ABCD$ 為平面上的一個平行四邊形，已知 A 點坐標為 $(1,2)$ 且 B 與 D 的坐標分別為 $(-3,-4)$ 與 $(5,6)$，若此平行四邊形經繞原點旋轉一有向角後，A 點坐標變成 $(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$，則 C 點經此旋轉後的坐標為 $\left(\frac{11\sqrt{5}}{25},\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right)$。

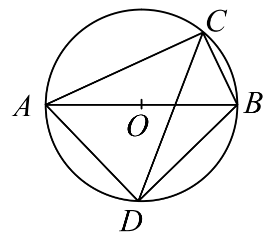
3. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，則 $A^{10}v=$ $\begin{bmatrix}31\\2\\3\end{bmatrix}$。

4. 已知抛物線 $y=x^2+(a+1)x+b$ 通過點 $(3,3)$，其中 a、b 為固定的實數，且對任意的實數 x，抛物線上的點 (x,y) 恆滿足 $y\geq x$，則抛物線的頂點到原點的距離為 $\frac{1}{4}\sqrt{221}$。

5. $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}}$ 的值為 $2009\frac{2009}{2010}$。

三、申論題(計算與證明)：50%，每題 25 分

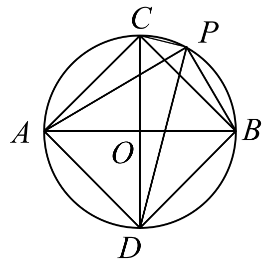
1. 如圖(二)，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，$\angle ACB$ 的平分線交圓 O 於 D



圖(二)

(1) 證明四邊形 $ADBC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\overline{CD}^2$。 (13 分)

(2) 如圖(三)，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 是圓 O 的兩條互相垂直的直徑，P 是弧 BC 上一點，$\overline{OB}=\overline{BP}=2$



圖(三)

(a) 求 $\overline{DP}=$？ (6 分)

(b) 求$\triangle PBD$ 與$\triangle PCA$ 面積的差。 (6 分)

2. (1) 若函數 $f(x)=\dfrac{ax^2+x+1}{x^2+x+1}$ 的值域是所有的實數，則實數 a 必須在什麼範圍內？

(12 分)

(2)設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為任意的 n 個實數，試證：$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 。

(13 分)