

新北市立高中職 102 學年度教師聯合甄選

數學科目答案

一、選擇題：(每題 3 分，共 5 題，計 15 分)

1	2	3	4	5
B	B	C	A	D

二、填充題：(每題 5 分，共 5 題，計 25 分)

1	2	3	4	5
12	2736	19	①②③	-5050

三、計算題：(共 4 題，計 60 分)

1. 袋中有黑、白球各一顆，每次從袋中任取一球，取出的球不放回，但再放進一顆黑球，令 a_n 為第 n 次取到黑球的機率。

(1) 寫出 a_n 的遞迴關係式。

Ans: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_{n-1}$ ($n \geq 2$) (10 分)

(2) 求 a_n 的一般式。

Ans: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (10 分)

2. 已知有 n 個任意的正方形紙片，證明：可以用剪刀把它們剪開，然後組拼成一個新的正方形。

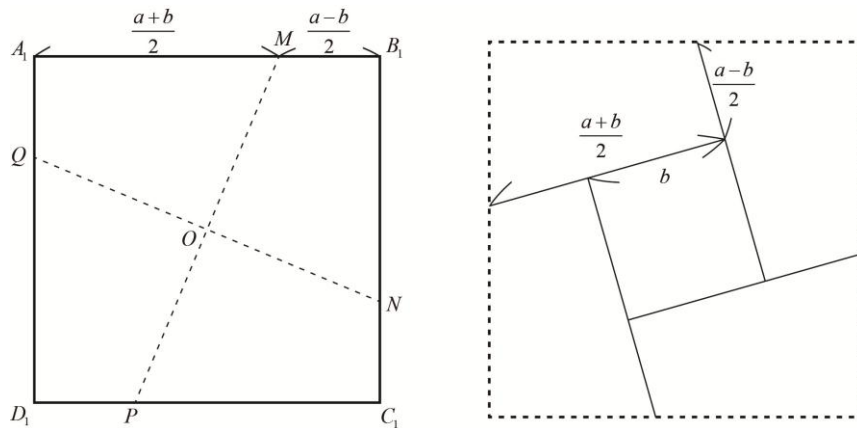
證明： (10 分)

(1) 當 $n=2$ 時，設兩個正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 的邊長為 a 和 b ($a \geq b$) 在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的每個邊上，順序截取 A_1M ， B_1N ， C_1P ， D_1Q ，使得

$$A_1M = B_1N = C_1P = D_1Q = \frac{a+b}{2}$$

連接 \overline{MP} 及 \overline{NQ} 且令其交於 O 點，可知 $\overline{MP} \perp \overline{NQ}$ 。

沿著線段 \overline{MP} 及 \overline{NQ} 把正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 剪開，得到四塊全等的圖形（有兩個直角），將這四塊圖形與正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 合拼成一個新的正方形，如下圖所示：



因此， $n=2$ 時成立。

(2) 假設 $n=k$ 時，成立，則當 $n=k+1$ 時，前 k 個正方形可以拼成一個新的正方形，把這個正方形依照 (1) 的方法剪開，截取的線段長是這個新的正方形的邊長及第 $k+1$ 個正方形邊長和的一半，然後和第 $k+1$ 個正方形如 (1) 的方法拼組成第 $k+1$ 個新的正方形，因此， $n=k+1$ 時成立。

因此，由數學歸納法知，此命題成立。

3. 某系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

- (1) 四件作品的得票情形共有幾種？
- (2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分佈有幾種？

解：

(1) 由題意可以知道：

a. 四件作品所得的總票數為 20 票。

b. 每件作品最多可以得到 10 票。

令四件作品的得票數分別為 x, y, z, u ，由 a、b 可得

$$x + y + z + u = 20, \quad 0 \leq x, y, z, u \leq 10$$

因為 $0 \leq x, y, z, u \leq 10$ ，所以 H_{20}^4 須扣掉 $11 \leq x, y, z, u \leq 20$ 的情況。由 $x + y + z + u = 20$ 且

$x, y, z, u \geq 0$ 可知最多只有一個票數會大於等於 11，

假設 $x \geq 11$ ，令 $x = x' + 11$ ，可得

$$x' + y + z + u = 9, \quad 0 \leq x', y, z, u \leq 9$$

此情況有

$$H_9^4 = C_9^{12} = 220 \text{ 種。}$$

因此票數分布為

$$H_{20}^4 - 4 \times H_9^4 = 1771 - 4 \times 220 = 891 \text{ 種。} \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

(2) 假設得票數最高為 x ，由題意可得

$$x + y + z + u = 20, \quad 0 \leq y, z, u < x \leq 10$$

因為 $y, z, u < x$ ，也就是 $y, z, u \leq x - 1$ ，所以

$$x + y + z + u \leq x + (x - 1) + (x - 1) + (x - 1) = 4x - 3$$

由 $x + y + z + u = 20$ 得

$$20 \leq 4x - 3$$

即

$$\frac{23}{4} \leq x$$

因此，當 $x \geq 6$ 時，才會滿足只有一件作品得票數最高且票數為 x 。

當 $x = 6$ 時，

$$y + z + u = 14, \quad 0 \leq y, z, u \leq 5$$

滿足此情況的 y, z, u 有 $(5, 5, 4), (5, 4, 5), (4, 5, 5)$ 3 種。

當 $x = 7$ 時，

$$y + z + u = 13, \quad 0 \leq y, z, u \leq 6$$

因為 $y + z + u = 13$ 且 $y, z, u \geq 0$ ，所以 y, z, u 最多只有一個會大於等於 7

由 (1) 可知滿足此情況有

$$H_{13}^3 - 3 \times H_6^3 = C_{13}^{15} - 3 \times C_6^8 = 105 - 84 = 21 \text{ 種。}$$

同理

當 $x = 8, 9, 10$ 時， y, z, u 最多只有一個會大於等於 8, 9, 10，故

當 $x = 8$ 時，有

$$H_{12}^3 - 3 \times H_4^3 = C_{12}^{14} - 3 \times C_4^6 = 91 - 45 = 46 \text{ 種。}$$

當 $x=9$ 時，有

$$H_{11}^3 - 3 \times H_2^3 = C_{11}^{13} - 3 \times C_2^4 = 78 - 18 = 60 \text{ 種。}$$

當 $x=10$ 時，有

$$H_{10}^3 - 3 \times H_0^3 = C_{10}^{12} - 3 \times C_0^2 = 66 - 3 = 63 \text{ 種。}$$

因此滿足只有一件作品得票數最高的情形有

$$4 \times (3 + 21 + 46 + 60 + 63) = 772 \text{ 種。} \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

4. 試求所有滿足以下不等式的正整數 (a, b, c) :

$$\frac{41}{42} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$$

解：

不妨設 $a \leq b \leq c$ ，並將原不等式改寫成

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \quad (*)$$

顯然， $a \geq 2$ 。若 $a \geq 3$ ，則

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 & \text{當 } c = 3 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{41}{42} & \text{當 } c \geq 4 \end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $a = 2$ 。若 $b \geq 4$ ，則

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 & \text{當 } c = 4 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{41}{42} & \text{當 } c \geq 5 \end{cases}$$

均與已知不等式不合，故得 $b = 3$ 。將 $a = 2, b = 3$ 代入 $(*)$ 式，可得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < 1$$

由此可知 $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{c} < \frac{1}{6}$ ，得 $c = 7$ 。因此，所求的正整數解 (a, b, c) 為

$$(2, 3, 7), (2, 7, 3), (3, 2, 7), (3, 7, 2), (7, 2, 3), (7, 3, 2) \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$