

新北市立高中職 101 學年度教師聯合甄選

數學科試題

一、選擇題：20%，每題 4 分

1. 班佛法則：銀行存款的首位數為 a （即存款數字的第一位數為 a ，例如存款金額為 483216 的首位數是 4）的比例約有 $\log_{10}(1+\frac{1}{a})$ 。根據班佛法則，銀行存款的首位數為 4，或 5，或 6，或 7 的人約有多少比例：（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ）
- (A) 20% (B) 30% (C) 40% (D) 50%

2. 滿足不等式 $(0.027)^{x^2} > (0.3)^{10x-3}$ 的整數 x 有幾個？

(A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個

3. 母體分配為常態分配，進行平均數 μ 的區間估計時，在信心水準不變下，欲使信賴區間長度減少為原來信賴區間長度的一半時，樣本個數需增加為原來的多少倍？

(A) $\sqrt{2}$ 倍 (B) 4 倍 (C) $2\sqrt{2}$ 倍 (D) 1.5 倍

4. 設 $x = \frac{1}{\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2025}}$ ，則 x 的整數部份之值為：

(A) 78 (B) 79 (C) 80 (D) 81

5. 物理學家狄拉克善於玩弄只用三個 2 及數學符號來表示實數，例如

$$n = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}}$$

就是一個例子。問：這個實數 n 等於

(A) -3 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填充題：40%，每題 5 分

1. 若 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 7$ 與 $g(x) = x^2 + bx + 5$ 有相同的整係數一次因式，且 $a, b \in N$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

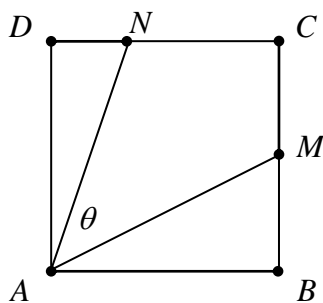
2. $1 < x < 10$ ，且 $\log x^3$ 與 $\log x^{-1}$ 的尾數相等，則 $x =$ _____。
3. 設 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為二階方陣，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值 = _____。
4. 設 $(x-1)^3$ 除 $f(x) = x^{100} + 1$ 之餘式為 $ax^2 + bx + c$ ，則 $a =$ _____。
5. 若 $f(x) = x^3 + 3x^2 + q$ 有 3 個相異實根， q 為實數，請寫出 q 的範圍：_____。
6. 某交叉路口的「閃黃燈秒數」 $f(v)$ (秒) 應以

$$\frac{v}{10} + \frac{90}{v} + 1$$

這公式規範較適宜，這裡的 v (公里/小時) 代表該路段的最高時速限制。

問：將最高時速限制 v (公里/小時) 訂為 _____ 時，這交叉路口的「閃黃燈秒數」會剛好是 7 秒。

7. 如下圖，若 $ABCD$ 為正方形， M 為 \overline{BC} 的中點， N 為 \overline{CD} 的三等分點且靠近 D 點，其中 $\angle MAN = \theta$ ，則 $\sin \theta =$ _____。



8. 若一組資料 X 之母體期望值為 μ_x ，母體標準差為 σ_x 。若令 $Y = \frac{5(X - \mu_x)}{\sigma_x} + 10$ ，則數對 $(\mu_y, \sigma_y) =$ _____。

三、計算及證明題：40%，每題 10 分

9. 若 $0 < \alpha < 1$ ，證明： $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ ， $\forall x > 0$ 。
10. 設 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ ， n 為自然數，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。
11. 二向量 $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (x, y, z)$ ，若 $|\vec{b}| = 9$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值。
12. 在拋物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ 上，分別以 $(0, -3)$ 及 $(3, 0)$ 兩點為切點作切線，求此二切線與前述拋物線所圍成之區域面積。