新北市立高中職 101 學年度教師聯合甄選

數學科答案

一、選擇題：20%，每題 4 分

1	2	3	4	5
B	**C**	**B**	**C**	**D**

二、填充題：40%，每題 5 分

1. $f(x)$ 可能的一次整係數因式爲 $x+1$、$x-1$、$x+7$、$x-7$，$g(x)$ 可能的一次整係數因式爲 $x+1$、$x-1$、$x+5$、$x-5$，所以 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可能的一次整係數因式爲 $x+1$、$x-1$。
若爲 $x-1$，則 $f(1)=1+a+4-7=0$ 與 $g(1)=1+b+5=0$，得 $b=-6$ 不合。
若爲 $x+1$，則 $f(-1)=-1+a-4-7=0$ 與 $g(-1)=1-b+5=0$，得 $a=12$，$b=6$。

2. $\log x^3-\log x^{-1}=3\log x+\log x=4\log x$ 爲整數，$1<x<10\Rightarrow 0<\log x<1$ $\Rightarrow 0<4\log x<4$，故得 $x=\sqrt[4]{10}$、$\sqrt[4]{100}$ 或 $\sqrt[4]{1000}$

3.
$$X=\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4&-6\\7&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-8\\-19&15\end{bmatrix}$$，$a+b+c+d=-2$。

4. 4950

5. $-4<q<0$

6. 30

7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\mu_Y = E[\frac{5(X-\mu_X)}{\sigma_X}+10] = \frac{5(E[X]-\mu_X)}{\sigma_X}+10 = 10$

$\sigma_Y^2 = Var[\frac{5(X-\mu_X)}{\sigma_X}+10] = \frac{5^2}{\sigma_X^2}Var(X) = 5^2 \Rightarrow \sigma_Y = 5$

三、計算及證明題：40%，每題 10 分

9. 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$，$x>0$ $\Rightarrow f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$，$x>0$

由均值定理，存在 $c\in(0,x)$ 使得 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$

$\Rightarrow \dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x-0}=\alpha(1+c)^{\alpha-1}<\alpha \quad \Rightarrow (1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$，$x>0$

10. $a_n-a_{n-1}=(-\frac{1}{2})(a_{n-1}-a_{n-2})=(-\frac{1}{2})^2(a_{n-2}-a_{n-3})=\cdots\cdots$

$=(-\frac{1}{2})^{n-2}(a_2-a_1)=(-\frac{1}{2})^{n-2}$，$n\ge 3$

$$\sum_{k=3}^{n}(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=3}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-2}=\frac{(-\frac{1}{2})[1-(-\frac{1}{2})^{n-2}]}{1-(-\frac{1}{2})}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-2}$$

$\Rightarrow a_n=a_2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-2}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-2}$，$n\ge 3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{3}$

11. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2x+y+2z$，$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=9$，$x^2+y^2+z^2=81$
由柯西不等式得 $(x^2+y^2+z^2)(2^2+1^2+2^2)\ge(2x+y+2z)^2=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$
所以 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le 81\cdot 9\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\le 27$，最大值爲 27。

12. $f(x)=-x^2+4x-3(0,-3)$，$f'(x)=-2x+4$，$f'(0)=4$，$f'(3)=-2$。因此兩

切線為 $y=4x-3$ 與 $y=-2x+6$，兩切線相交於 $(\frac{3}{2},3)$

面積 $=\int_{0}^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]dx=\frac{9}{4}$